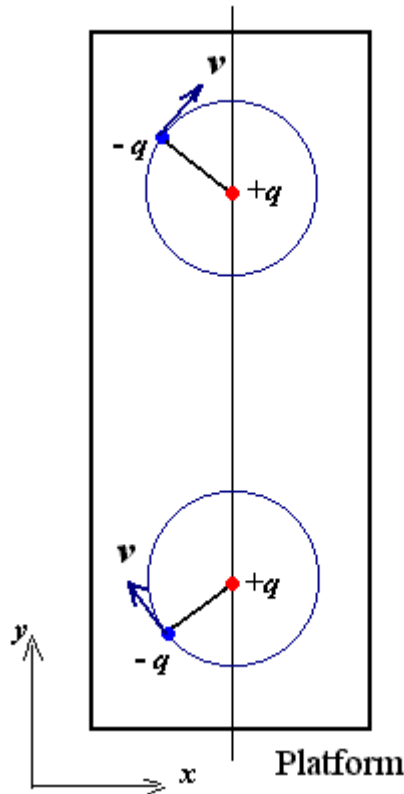


Парадокс Г. Иванова.

Kirk T. McDonald,
Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544

1. Парадокс.

Владимир Онучин обратил наше внимание к парадоксу¹, относящемуся к аппарату показанному на рисунке внизу. Два электрических заряда $-q$ приводятся в равномерное движение по окружности со скоростью v так что их азимутальные углы всегда имеют разность фаз 90° . Аппарат, включающий моторы, приводящие в движение отрицательные заряды, укреплен на свободной от трения платформе, так что нет внешних сил, действующих в $(x - y)$ плоскости. Поэтому ожидается, что центр масс системы будет оставаться в покое. Однако магнитные силы Лоренца движущихся зарядов друг на друга не равны и противоположны по направлению, так что сумма сил не равна нулю. В частности, полная (магнитная) сила Лоренца имеет компоненту в $-x$ направлении в любой момент времени. Поэтому мы должны заключить, что центр масс системы монотонно ускоряется в этом же направлении за счет внутренних сил, что противоречит принципам Ньютоновой механики.



Сумма (магнитных) сил Лоренца, действующих на два заряда (в Гауссовых единицах) порядка $q^2 v^2 / c^2 r^2$, где c - скорость света, r - среднее расстояние между двумя зарядами.

¹ Автором которого является Г. Иванов.

Для любого аппарата, который может быть помещен на лабораторный стол, сила, которая кажется нарушает законы механики, чересчур мала. Но дело в принципе: согласуются ли законы электромагнетизма с законами механики?

Ампер, Био-Савар и Лоренц.

Истоки парадокса Иванова восходят к Амперу (1822) [1], когда он записал выражение для силы, действующей между двумя контурами с токами I_1 и I_2

$$F = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \left[d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 - \frac{3}{2} (\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}_1)(\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}_2) \right] \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{Ampere}), \quad (1)$$

взамен более знакомого (в настоящее время) закона Био-Савара (в форме, позднее записанной Грассманом [3])

$$F = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint d\mathbf{l}_1 \times \frac{d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{Biot} - \text{Savart} - \text{Grassman}), \quad (2)$$

поскольку подинтегральный член в (1), но не в (2), находится вдоль линии, соединяющей токовые элементы контуров и неявно полагается, что силы пары токовых элементов друг относительно друга равны и противоположны. Однако, как отмечено Ампером в 1826 году [4], закон Био-Савара (2) более согласуется с концепцией магнитного поля,

$$F = \oint \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{c} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \oint \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{c} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{Ampere} - \text{Biot} - \text{Savart}), \quad (3)$$

Магнитный член в законе силы Лоренца [5] следует из (3) при замене токового элемента $I d\mathbf{l}$ на $q\mathbf{v}$, где q - заряд, \mathbf{v} - его скорость,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = q\frac{v}{c} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{Lorentz}). \quad (4)$$

Так как уравнение (4) как экстраполяция закона Био-Савара к изолированным токовым элементам ведет к кажущемуся противоречию с Ньютоновыми законами механики, то Ампер предположительно должен был заключить, что изолированные токовые элементы не могут существовать.

Максвелл слегка изменил этот взгляд Ампера, так как он рассматривал электрический заряд как непрерывно распределенную плотность ρ , относящуюся к напряжениям в эфире согласно $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}/4\pi$, где \mathbf{D} вектор смещения электрического поля.

Электродинамика, в основе которой - заряженные частицы, могла быть развита только после усилий Томпсона [6] и Пойнтинга [7], которые показали, что ЭМ поля могут переносить энергию и импульс². Сила Лоренца, действующая на заряд, впервые обсуждалась Томпсоном в Гл. 5 [6] - см. обзор Лоренца [10].

Однако сомнения Ампера относительно соответствия силы Лоренца и законами Ньютона редко в явной форме адресовались к ЭМ теории заряженных частиц, так что примеры, подобные примеру Иванова, могут казаться парадоксальными

² Что движущийся заряд, взаимодействующий с тепловым излучением, должен испытывать радиационное давление, было предугадано Стюартом в 1871-3 гг. [8], который сделал предположение, что энергия и импульс заряда будет изменяться. В 1873 г. Максвелл обсуждал давление света на проводящую среду, находящуюся в состоянии покоя, и на "среду, в которой распространяются волны" ([9], Гл. 792-793).

3. Сила Лоренца пары зарядов с точностью до $1/c^2$

Статья Пейджа и Адамса [11] предоставляет нам хорошую возможность разрешить парадокс Иванова: с точностью до $1/c^2$ \mathbf{E} и \mathbf{H} поля пары зарядов дают вклад в ненулевую силу Лоренца. Иное рассмотрение дано в Приложении В.

Для вычисления силы Лоренца с точностью до $1/c^2$ достаточно использовать выражение (4) для магнитного поля. Однако, чтобы достичь нужной точности \mathbf{E} поле движущегося заряда должно включать эффекты запаздывания, как это может быть получено из разложения полей Льенара-Вихерта [12, 13] (более детально см. Приложение в [14]),

$$E \approx q \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 3 \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v})^2}{2c^2} \right) - \frac{q}{2c^2 r} [\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}], \quad (5)$$

где a - ускорение заряда в текущий момент времени.³ Тогда полная ЭМ сила F_{EM} , действующая на пару ускоряющихся зарядов, разделенных расстоянием $r = r_2 - r_1$, есть, с точностью до $1/c^2$

$$\mathbf{F}_{EM} = -\frac{q_1 q_2}{2c^2 r} \left\{ \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + [(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}] \hat{\mathbf{r}} - \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} [v_1^2 - v_2^2 - 3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_1)^2 + 3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_2)^2] - \frac{2\hat{\mathbf{r}}}{r} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \right\} \quad (6)$$

где тройное векторное произведение описывает эффект магнитного поля.

В примере Иванова, где имеется круговое движение, $v_1 = v_2 = v$ и $a_1 = a_2 = v^2/R$, и R - радиус окружности, который меньше, чем расстояние r между двумя зарядами. Потому наибольший вклад в полную ЭМ силу дает электрическое поле, создаваемое ускорениями частиц, но не магнитное поле. Кроме того, часть силы Лоренца, создаваемая ускорениями, осцилляторного типа, и это является ключевым элементом в разрешении парадокса Иванова.

Может быть полезно расписать (6) более подробно для примера Иванова, приняв расстояние между двумя вращающимися дисками (на ободах которых закреплены отрицательные заряды) за D , $D \gg R$. Мы рассчитаем силу (6) с точностью до R/D .

Положения, скорости и ускорения двух зарядов могут быть записаны как:

$$\mathbf{r}_1 = R \sin \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{x}} + R \cos \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_2 = D \hat{\mathbf{y}} + R \cos \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{x}} - R \sin \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{y}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_1 = v \cos \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{x}} - v \sin \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}_2 = -v \sin \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{x}} - v \cos \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{y}}, \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{v^2}{R} \sin \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{x}} - \frac{v^2}{R} \cos \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{v^2}{R} \cos \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{x}} + \frac{v^2}{R} \sin \frac{vt}{R} \hat{\mathbf{y}}, \quad (9)$$

Для этого примера члены в (6), содержащие скорости - порядка R/D , умноженные на главные члены в ускорениях. Поэтому чтобы обеспечить точность порядка R/D , достаточно

³ Выражение (5) может быть преобразовано в выражение более привычного вида для части электрического поля, который меняется с расстоянием как $1/r$, то есть $-q[a_{\perp}/c^2 r]_{ret} = -q[(\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}})/c^2 r]_{ret}$, с ускорением, вычисляемым в запаздывающее время $t' = t - r/c$

аппроксимировать $r \approx D$ и $\hat{\mathbf{r}} \approx \hat{\mathbf{y}}$ в членах, содержащих скорости. Однако мы должны сохранить первые поправки к r и $\hat{\mathbf{r}}$ в членах, содержащих ускорения. Тогда мы запишем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = D \left[\hat{\mathbf{y}} + \frac{R}{D} \left(\cos \frac{vt}{R} - \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{\mathbf{x}} - \frac{R}{D} \left(\cos \frac{vt}{R} + \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{\mathbf{y}} \right], \quad (10)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{D \sqrt{1 - \frac{2R}{D} \left(\cos \frac{vt}{R} + \sin \frac{vt}{R} \right) + \frac{2R^2}{d^2}}} \approx \frac{1}{D} \left[1 + \frac{R}{D} \left(\cos \frac{vt}{R} + \sin \frac{vt}{R} \right) \right], \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \approx \hat{\mathbf{y}} + \frac{2R}{D} \left(\cos \frac{vt}{R} - \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad (12)$$

$$\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + [(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}] \hat{\mathbf{r}}}{r} \approx -\frac{v^2}{DR} \left[\left(\cos \frac{vt}{R} + \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{\mathbf{x}} + 2 \left(\cos \frac{vt}{R} - \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{\mathbf{y}} + \frac{2R}{D} \hat{\mathbf{x}} + \frac{3R}{D} \cos \frac{2vt}{R} \hat{\mathbf{y}} \right], \quad (13)$$

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} [v_1^2 - v_2^2 - 3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_1)^2 + 3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_2)^2] \approx -\frac{v^2}{D^2} \cos \frac{2vt}{R} \hat{\mathbf{y}}, \quad (14)$$

$$\frac{2\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \approx -\frac{2v^2}{D^2} \hat{\mathbf{x}}, \quad (15)$$

и мы обнаруживаем, что (6) может быть аппроксимировано как

$$\mathbf{F}_{\text{EM}} \approx \frac{q_1 q_2 v^2}{2DR c^2} \left[\left(\cos \frac{vt}{R} + \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{\mathbf{x}} + 2 \left(\cos \frac{vt}{R} - \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{\mathbf{y}} + \frac{6R}{D} \cos \frac{2vt}{R} \hat{\mathbf{y}} \right]. \quad (16)$$

Магнитная сила (15) уничтожается поправкой порядка R/D к электрической силе, обусловленной ускорением зарядов, как это видно из (13). Так что наиболее драматичный аспект парадокса разрешен - полная ЭМ сила осцилляторного типа. Однако, результирующая ЭМ сила (16), действующая на (изолированную) систему ненулевая, так что остается парадокс Ампера, заключающийся в том, что третий закон Ньютона не выполняется для силы Лоренца, действующей между парой движущихся зарядов.

4. Электромагнитный импульс.

Следуя Пойнтингу [7]⁴, мы теперь рассмотрим импульс ЭМ поля, вычисляемый по формуле

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dVol \quad (17)$$

Однако мы не можем отделить "собственный импульс" $\int [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dV/4\pi c$ от механического импульса частицы j .⁵ Скорее нам надо рассматривать импульс взаимодействия

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} \int \{[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2] + [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1]\} dVol \quad (18)$$

⁴Хевисайд независимо ввел в 1885 [16] то, что теперь называется вектором Пойнтинга, используя изобретенные им в 1882 современные обозначения векторов [17]. Двойная роль вектора Пойнтинга, как потока энергии и плотности ЭМ импульса была впервые отмечена Абрахамом [18]

⁵С точностью до $1/c^2$ механический импульс частицы с массой покоя m и скоростью \mathbf{v} есть $\mathbf{P}_{\text{mech}} = m\mathbf{v}(1 + v^2/c^2)$. Использование этой формы в уравнении движения (20) включает эффекты электромагнитного "собственного импульса".

Сохраняя только члены порядка $1/c^2$, мы получаем для соответствующего ЭМ импульса [11]

$$\mathbf{P}_{\text{EM}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi c^2} \int \frac{[\hat{\mathbf{r}}_2 \times [\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1]] + [\hat{\mathbf{r}}_1 \times [\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2]]}{r_1^2 r_2^2} dVol = \frac{q_1 q_2}{2c^2 r} [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + ((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}]. \quad (19)$$

В то время как, строго говоря, ЭМ импульс есть присущ всей системе как целое, члены в (19), содержащие \mathbf{v}_j могут быть идентифицированы как импульс взаимодействия, присущий частице j .

Взяв производную по времени от (19), мы обнаруживаем, что

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{EM}}}{dt} = -\mathbf{F}_{\text{EM}}, \quad (20)$$

сравнением этой производной с (6). Таким образом, вычисление ЭМ импульса согласно уравнения (18) и (19) дает нам решение уравнения (20) ⁶

5. Два заряда, на которые не действуют внешние силы.

Если два заряда взаимодействуют между собой только через ЭМ силы, тогда второй закон Ньютона для них

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{EM}}, \quad (22)$$

где \mathbf{P}_{mech} общий механический импульс зарядов. Тогда в согласии с (20) мы запишем

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{total}}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{\text{EM}}}{dt}. \quad (23)$$

В этом случае центр масс двух частиц может двигаться под действием их сил Лоренца, но центр импульсов системы остается фиксированным (или пребывает в равномерном движении).

6. Разрешение парадокса Иванова.

Возвращаясь к примеру Иванова, в котором два заряда приведены в движение по кругу, мы обнаруживаем, что кроме силы Лоренца имеются и другие силы. Движение и следовательно механический импульс \mathbf{P}_{mech} зарядов, изменение этого импульса и полная

⁶Этот результат не является сюрпризом в том, что согласно одному из аргументов Пойнтинга сила Лоренца может быть преобразована как

$$\mathbf{F}_{\text{EM}} = \oint \vec{T} \cdot d\text{Area} - \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dVol \quad (21)$$

где \vec{T} тензор напряжений Максвелла. См например Гл. 10 [10]. Для связанной системы зарядов, для которой можно пренебречь излучением, интеграл напряжений исчезает по мере того, как площадь/объем интегрирования растет, что приводит к (20). В данном анализе, который выполнен с точностью до $1/c^2$, излучением можно пренебречь, поскольку излучательные эффекты – порядка $1/c^3$ согласно формуле Лармора $dU/dt = 2q^2 a^2 / 3c^3$.

сила $\mathbf{F}_{\text{total}}$, действующая на заряды, известны (в первом приближении), так что мы запишем

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{total}} = \mathbf{F}_{\text{EM}} + \mathbf{F}_{\text{other}}. \quad (24)$$

Также мы должны рассмотреть возможное движение поддерживающей заряды платформы, на которую действует сила реакции $-\mathbf{F}_{\text{other}}$, исходя из предположения, что силы между платформой и зарядами подчиняются 3-му закону Ньютона. Поэтому уравнение движения платформы может быть записано как

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{platform}}}{dt} = -\mathbf{F}_{\text{other}}. \quad (25)$$

Скомбинированное уравнение движения для платформы плюс заряды следует из (24)-(25) и (20)

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{\text{platform}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{EM}} = -\frac{d\mathbf{P}_{\text{EM}}}{dt}. \quad (26)$$

Полный импульс системы, $\mathbf{P}_{\text{EM}} + \mathbf{P}_{\text{mech}} + \mathbf{P}_{\text{platform}}$, постоянный, как это и ожидалось. Центр масс "заряды + платформа" может меняться во времени, так что полный механический импульс всегда равен $-\mathbf{P}_{\text{EM}}$. Возвращаясь к уравнению (19), мы видим, что ЭМ импульс \mathbf{P}_{EM} (и поэтому механический импульс также $\mathbf{P}_{\text{mech}} + \mathbf{P}_{\text{platform}}$) периодичен во времени. Для примера парадокса Иванова со скоростями, описываемых уравнением (8), ЭМ импульс (19) есть (используя (11)-(12) и вычисляя с точностью до $1/c^2$ и R/D),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{EM}} &= -\mathbf{P}_{\text{mech}} - \mathbf{P}_{\text{platform}} \\ &\approx \frac{q_1 q_2 v}{2c^2 D} \left[\left(\cos \frac{vt}{R} - \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{x} - 2 \left(\cos \frac{vt}{R} + \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{y} - \frac{R}{D} \left(1 + 3 \sin \frac{2vt}{R} \right) \hat{y} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Мы видим, что временная производная (27) есть сила, вычисленная из (16), с обратным знаком.

Однако появление постоянного члена $-(q_1 q_2 v / 2c^2 D) \hat{y}$ в (27) выглядит удивительным. Можно предположить, что имеется некоторый вид "скрытого" механического импульса системы, который равен и противоположен по знаку этому постоянному члену.

Я полагаю, что закон движения центра масс $\mathbf{r}_{\text{CM}}(t)$ системы может быть получен интегрированием $\mathbf{F}_{\text{EM}} = m_{\text{system}} \cdot \mathbf{a}_{\text{CM}}$ с использованием (16), что дает

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \approx \frac{q_1 q_2 v}{m_{\text{system}} c^2} \frac{R}{2D} \left[\left(\cos \frac{vt}{R} + \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{x} + 2 \left(\cos \frac{vt}{R} - \sin \frac{vt}{R} \right) \hat{y} + \frac{3R}{2D} \cos \frac{2vt}{R} \hat{y} \right]. \quad (28)$$

Это движение периодическое, но со сложной траекторией и очень малой амплитудой.

7. Приложение А. Электрическое взаимодействие цепей.

Должна ли сила между двумя цепями, нагруженными постоянными токами, включать члены, возникающие из-за запаздывающих E полей движущихся зарядов, которые того же порядка, что и магнитная сила? Если это так, то анализ Ампера магнетизма должен бы быть некорректным. Важная особенность между проводом с током и изолированным зарядом в том, что провод электрически нейтрален (в первом приближении). Так что в проводе нет результирующего кулонова поля из-за зарядов в нем. Однако имеется ненулевое

Е поле в проводе, так как только движущиеся заряды порождают поправки порядка $1/c^2$ к их кулоновым полям. Но это ненулевое \mathbf{E} поле не дает результирующую силу, действующую на вторую цепь, если эта цепь также электрически нейтральна.

Действительно ли провода с током электрически нейтральны? ⁷. Если провод имеет ненулевую электропроводимость σ и плотность тока \mathbf{J} , тогда должно быть продольное \mathbf{E} поле внутри провода согласно закону Ома, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Это \mathbf{E} поле создано и удерживаемое присутствием ненулевой поверхностной плотностью зарядов, величина которой изменяется линейно вдоль провода (так что величина \mathbf{E} не зависима от положения). Плотность заряда на единицу длины примерно $I\mathcal{R}z$ [20], где \mathcal{R} - сопротивление на единицу длины вдоль провода. Численное значение \mathcal{R} - доли Ома на см. Отметим, что в Гауссовых единицах $1/c = 30$ Ом. Поэтому результирующий заряд на единицу длины провода с током порядка $1/c$. Поверхностное распределение заряда имеет дипольный характер, так что его электрическое поле вне провода спадает скорее как R/r^3 , чем $1/r^2$, где R - характерный радиус провода.

Поэтому электрическая сила между парой контуров, разделенных расстоянием r , из-за поверхностного распределения зарядов имеет масштабный фактор $I_1I_2R^3/c^2r^3$ и ею можно пренебречь в сравнении с магнитной силой, которая имеет масштабный фактор $I_1I_2R^3/c^2r^2$ согласно закону Ампера.

Также между контурами с токами существуют электрические силы, которые порядка $I_1I_2R^2/c^3r^2$, получающиеся перемножением результирующего заряда (одного контура) I_1R/c на поправку за счет запаздывания I_2vR/c^2 при движении зарядов во втором контуре. Эта поправка согласно анализу Ампера порядка v/c по отношению к магнитным силам и потому ею также можно пренебречь для обычных контуров.

8. Приложение В: Разрешение с помощью лагранжиана Дарвина.

Альтернативный (и более формальный) подход к изложенному парадоксу может быть основан на приближении лагранжиана Дарвина [21] (также § 65 [22] и Гл. 12.6 [23]), где описывается взаимодействие частиц через их электромагнитные потенциалы в кулоновой калибровке с точностью до $1/c^2$.

Здесь достаточно сказать, что векторный потенциал \mathbf{A}_1 электрического заряда q_1 , движущегося со скоростью v_1 на расстоянии r есть (с точностью до $1/c^2$ в кулоновой калибровке)

$$\mathbf{A}_1 = \frac{q_1}{cr} [\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] . \quad (29)$$

Канонический импульс \mathbf{p}_2 заряда q_2 в поле заряда 1 тогда

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{\text{mech}, 2} + \frac{q_2\mathbf{A}_1}{c} , \quad (30)$$

где член $q_2\mathbf{A}_1/c$ часто называют ЭМ импульсом заряда 2. ⁸ Электромагнитный импульс

⁷Большинство обсуждений о результирующем заряде провода с током фокусируются на очень слабом эффекте. А именно, что объем, занимаемый ненулевой плотностью заряда движущихся электронов должен быть в $(1 + v^2/c^2)$ больше соответствующего объема неподвижных положительных зарядов, так что электроны проводимости не ощущают радиальной силы. Однако, результирующая плотность заряда благодаря этому эффекту в v/c раз меньше, чем поверхностная плотность заряда, требуемая чтобы удержать продольное поле внутри провода.

⁸Следуя Максвеллу, кто обозначал A/c как "электрокинетический импульс" в Гл. 604 [9], без современного определения "на единицу заряда"

общей системы зарядов q_1 и q_2 есть тогда

$$\mathbf{P}_{EM} = \frac{q_1 q_2}{2c^2 r} [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + (\mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}], \quad (31)$$

как и было найдено перед этим в (19).

Полный канонический импульс изолированной системы есть, разумеется, величина постоянная во времени, что опять приводит к выводам Гл. 5 и 6.

. Литература.

[1] А.М. Ampère, Mémoire sur la détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltiques, *Ann. Chem. Phys.* **20**, 398, 422 (1822).

[2] Наиболее интенсивная дискуссия на английском о вкладе Ампера в связь магнетизма и механики дана в: R.A.R. Tricker, *Early Electrodynamics, the First Law of Circulation* (Pergamon, Oxford, 1965).

Другой исторический обзор: O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein* (Oxford U.P., 2000).

Также Гл. IIА J.D. Jackson and L.B. Okun, Historical roots of gauge invariance, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 663 (2001),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/jackson_rmp_73_663_01.pdf

[3] H.G. Grassmann, Neue Theorie der Elektrodynamik, *Ann. Phys.* **64**, 1 (1845).

[4] А.М. Ampère, Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience (Paris, 1826).

[5] H.A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, *Arch. Néerl.* T. **25**, 476 (1892).

[6] J.J. Thomson, On the Electric and Magnetic Effects produced by the Motion of Electrified Bodies, *Phil. Mag.* **11**, 8 (1881),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/thomson_pm_11_8_81.pdf

[7] J.H. Poynting, On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **175**, 343 (1884),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/poynting_ptrsl_175_343_84.pdf

[8] B. Stewart, Temperature Equilibrium of an Enclosure in which there is a Body in Visible Motion, *Brit. Assoc. Reports*, 41st Meeting, Notes and Abstracts, p. 45 (1871),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/stewart_bar_41_45_71.pdf

Это собрание было инициировано У. Томпсоном в память о Гершеле; среди множества других тем Томпсон рассуждал о размерах атомов, происхождении жизни на Земле благодаря микроорганизмам, занесенным на нее метеоритами, что невозможно объяснить природу энергии Солнца, однако можно объяснить смещение перигелия Меркурия, измеренного Леверье.

Aethereal Friction, *Brit. Assoc. Reports*, 43rd Meeting, Notes and Abstracts, pp. 32-35 1873),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/stewart_bar_43_32_73.pdf

Стюарт приводил доводы, что сопротивление излучения, ощущаемое зарядом, движущимся через поток излучения от черного тела, исчезает, когда температура резервуара (где находится черное тело) становится нулевой, подобно тому, как электросопротивление проводника стремится к нулю при $T = 0$. На 43-м собрании был также зачитан отчет Максвелла

об экспоненциальном распределении плотности атмосферы как пример статистической механики (стр. 29–32), доклад Релея о дифракционном пределе четкости спектральных линий (стр. 39) и (возможно вызвавший наибольшее внимание) доклад А.Х. Аллена об определении фальшивого чая (стр. 62).

[9] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd ed. (Clarendon Press, Oxford, 1894; reprinted by Dover Publications, New York, 1954). Первое издание появилось в 1873.

[10] H.A. Lorentz, Contributions to the theory of electrons, *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* **5**, 608 (1908),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/lorentz_praa_5_608_08.pdf

[11] L. Page and N.I. Adams, Jr., Action and Reaction Between Moving Charges, *Am. J. Phys.* **13**, 141 (1945),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/page_ajp_13_141_45.pdf

[12] A. Liénard, Champ électrique et magnétique produit par une charge électrique contenue en un point et animée d'un mouvement quelconque, *L'Éclairage Élect.* **16**, 5, 53, 106 (1898).

[13] E. Wiechert, Elektrodynamische Elementar Gesetze, *Arch. Néerl.* **5**, 549 (1900).

[14] K.T. McDonald, *Mechanics and Electromagnetism*,

<http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/ph501lecture24/ph501lecture24.pdf>

[15] N. Itoh, Radiation reaction due to magnetic dipole radiation, *Phys. Rev. A* **43**, 1002 (1991),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/itoh_pra_43_1002_91.pdf

[16] O. Heaviside, On the Transmission of Energy through Wires by the Electric Current, *The Electrician* (Jan. 10, 1885), p. 178; reprinted in *Electrical Papers*, Vol. 1 (London, 1892), pp. 434-441.

[17] O. Heaviside, The Universal Relation Between a Vector and its Curl, *The Electrician* (Nov. 18, 1882), p. 6; reprinted in *Electrical Papers*, Vol. 1 (London, 1892), pp. 195-201.

[18] M. Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, *Ann. Phys.* **10**, 105 (1903),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/abraham_ap_10_105_03.pdf

[19] T.H. Boyer, Illustrations of the Relativistic Conservation Law for the Center of Energy, *Am. J. Phys.* **73**, 953 (2005),

http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/boyer_ajp_73_953_05.pdf

[20] K.T. McDonald, Hidden Momentum in a Coaxial Cable (Mar. 28, 2002),

<http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/hidden.pdf>

[21] C.G. Darwin, The Dynamical Motions of Charged Particles, *Phil. Mag.* **39**, 537 (1920), http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/darwin_pm_39_537_20.pdf

[22] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975).

[23] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1999).